

	Se consideră $a \in \mathbb{Z}_3$ și polinomul $f = X^3 + \hat{2}X^2 + a \in \mathbb{Z}_3[X]$.
(10p)	1) Calculați $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2})$.
(10p)	2) Determinați, pentru $a = \hat{1}$, rădăcinile polinomului considerat.
(10p)	3) Determinați $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.
(5p)	Se consideră polinomul $g = a_{10} \cdot X^{10} + a_9 \cdot X^9 + \dots + a_1 \cdot X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. 4) Arătați că $f(-1) + f(1)$ este un număr par.
(5p)	5) Arătați că, dacă $f(1)$ și $f(2)$ sunt numere impare, atunci f nu are rădăcini întregi.
(5p)	6) Demonstrați că, dacă $a_{10} = a_9 = \dots = a_0 \neq 0$, atunci polinomul f are o singură rădăcină reală.
	Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx, \forall n \in \mathbb{N}$
(10p)	7) Calculați I_1 și I_2 ;
(10p)	8) Arătați că: $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
(10p)	9) Demonstrați că: $n \cdot I_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx, \forall n \in \mathbb{N}$.
(5p)	10) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot I_n$.
(10p)	11) Calculați aria mulțimii plane cuprinse între graficele funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x, g(x) = 2 - 3x$.

Notă: Din oficiu se acordă 10 de puncte.